1.12. Özdeğerler ve Özvektörler

Her A kare matrisi için, bir λ skaler değeri ve sıfırdan farklı x matrisi şu şekilde bulunabilir.

$$Ax = \lambda x$$

Burada; λ, A matrisinin bir özdeğeri ve x öz vektörüdür. Bir A matrisi için λ ve x'i bulmak üzere, $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini yazarız.

Buradaki $(A-\lambda I)$ kare matrisi tekil bir matristir ve λ'yı bulmak için $|A-\lambda I| = 0$ karakteristik eşitliği kullanılır.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ değerleri bulunduktan sonra, beraberindeki özvektörler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kullanılarak bulunabilir.

Eğer bir özdeğer sıfır ise, karşılık gelen özvektör sıfır değildir.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$ matrisi verilsin.

$$|A-\lambda I| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (1-\lambda).(4-\lambda) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 2$$

$\lambda_1 = 3$'e karşılık gelen x_1 özvektörünü bulmak için,

$$(A - \lambda_1 I)\, x_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

eşitlikleri yazılır. $x_1 = x_2 = c$ ile birlikte keyfi bir sabit olarak şu şekilde yazılabilir.

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Benzer şekilde;

$\lambda_2 = 2$'ye karşılık gelen x_2 özvektörünü bulmak için,

$$(A - \lambda_2 I)\, x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2x_2 = x_1 \\ x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1/2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teorem

Eğer A $n \times n$'lik $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ özdeğerli bir matris ise aşağıdaki ifadeler verilebilir.

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$ matrisi verilsin.

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ özdeğerlerine sahiptir.

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6$ 'dır. Aynı zamanda $\det(A) = 4+2 = 6$

Yani; $\prod_{i=1}^{2} \lambda_i = \det(A)$ olduğu görülür.

$tr(A) = 1+4 = 5$, $tr(A) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 3+2 = 5$

olduğu açıktır.

UYGULAMA

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ olduğuna göre,

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 11 \\ 20 & 11\cancel{10} \end{bmatrix}$$

$$AB^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 19 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^TB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}$$

matrislerini hesaplayınız.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ old.

göre AB, AB^T, A^TB matrislerini bulunuz.

$AB = (2\times 3)(2\times 3)$ tanımlı değildir.

$$A.B^T = \begin{bmatrix} 4 & -15 \\ -1 & -20 \end{bmatrix}, \quad A^TB = \begin{bmatrix} -10 & 6 & 13 \\ 0 & -2 & -11 \\ 9 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A matrisinin tersinir olduğunu gösteriniz ve tersini bulunuz.

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ olsun. $ad - bc \neq 0$ ise tersi vardır.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix}$$

4. Üç öğrenci bir kırtasiyeciden kalem, silgi ve defter alıyor. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin i. satırı i. öğrencinin aldığı kalem, silgi ve defter sayısını göstermektedir. Kalem, silgi ve defterlerin birer tanesinin fiyatları sırasıyla 0.5, 0.3 ve 0.8 TL'dir. Öğrencilerin ödeyecekleri paraları matris çarpımından yararlanarak bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.8 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 3 \\ 4.8 \end{pmatrix}$$

5. $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

$c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin.

tr (AB) ve tr (BA) değerlerinin eşit olup olm. gösteriniz.

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 33 \\ 1 & 37 \end{bmatrix}$$

$$tr(AB) = 35 + 37 = 72$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & 19 & -29 \\ 10 & 44 & 0 \\ 56 & -2 & 54 \end{bmatrix}$$

$$tr(BA) = 54 + 44 - 26 = 72$$

tr (AB) = tr (BA) 'dır.

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

rank (A) = 1 rank (B) = 1

7. Aşağıdaki gibi A ve B parçalı matrislerini tanımlayalım.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{3\times 3} , \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]_{3\times 4}$$

$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$; $B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

a) Alt matrislerin parçalanışından faydalanarak, AB matrisini bulunuz.

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 3}}_{\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times 1}}_{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}}_{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} + \underbrace{1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{0} + \underbrace{1 \cdot 2}_{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 9 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

8. Aşağıdaki denklem sistemlerini çözümleyiniz.

a) $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right\}$$ $x_1 = 3/4 \quad x_3 = 7/4$

$x_2 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad rank(A) = 3$$

$$(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad rank(A, c) = 3$$

$x = A^- c$ de bir çözüm.

9) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ matrisi verilsin.

A matrisi için simetrik bir genelleştirilmiş invers bulunuz.

$rank(A) = 2$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$rank(A_{11}) = 2$

$$A^{-} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ şeklindedir.

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ şeklinde bulunur.

10. Bir A matrisi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ $\text{rank}(A) = 2$

1. C matrisi seçilir.
2. C^{-1} bulunur.
3. $(C^{-1})'$ alınır.
4. C, A matrisinde yerine yazılır.
5. A' alınır.

diğer elemanlar sıfır

A matrisinin genelleştirilmiş inversini bulunuz. $A \cdot A^{-} \cdot A = A$ sağlanır.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisini ele alalım.

$$C^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(C^{-1})' = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$ olur.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ yazılır.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ artık A'nın genelleştirilmiş inversi yani A^- dir.

$A \cdot A^- \cdot A = A$ eşitliği yazılarak sağlama yapılabilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$